

DOI 10.15589/jnn20170104

УДК 519.87:629.5.01

Т78

EQUATIONS OF DYNAMICS OF THE FLEXIBLE CONNECTION ELEMENT OF THE MARINE TETHERED SYSTEM

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТА ГИБКОЙ СВЯЗИ МОРСКОЙ ПРИВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ

Kostiantyn S. Trunin

trunin.konstantin.stanislav@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6345-6257

К. С. Трунин,

канд. техн. наук, доц.

*Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv**Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, г. Николаев*

Abstract. Developers of modern MTS and UTS face a number of similar problems during their creation. The study of the issues of dynamics of underwater MTS and vehicles, the force impact of the medium and the carrier vessel (CV), as well as the issues of control and stability of the movement are paramount and largely determine the possibility of their normal operation. The most significant feature of dynamics of the UTS is the necessity to account for the effect of the FC as a system with distributed parameters, also interacting with the flow of liquid. The aim of the study is to improve the design of the MTS with FC based on the enhancement of existing methods of the MTS design by developing computer models of dynamics of the FC within the MTS, taking into account their operational characteristics and allowing designing the MTS with appropriate properties and parameters more correctly and efficiently, as well as developing recommendations for predicting possible operational loads of such devices. There are obtained the equations of dynamics of the flexible connection (FC) element of the marine tethered system (MTS), which enable describing its substantial movements in the absolute coordinate system.

Keywords: flexible connection (FC); marine tethered system (MTS); FC element; dynamics of the FC element.

Аннотация. Получены уравнения динамики элемента гибкой связи морской привязной системы, позволяющие описывать его значительные перемещения в абсолютной системе координат.

Ключевые слова: гибкая связь; морская привязная система; элемент гибкой связи; динамика элемента гибкой связи.

Анотація. Отримано рівняння динаміки елемента гнучкого зв'язку морської прив'язної системи, що дозволяє описувати його великі переміщення в абсолютній системі координат.

Ключові слова: гнучкий зв'язок; морська прив'язна система; елемент гнучкого зв'язку; динаміка елемента гнучкого зв'язку.

REFERENCES

- [1] Blintsov V. S. *Privyaznyye podvodnyye sistemy* [Marine tethered systems]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1998. 231 p.
- [2] Blintsov V. S., Magula V. Ye. *Proektnyi rozrakhunok zusyul u kabel-trosi pryviaznoi pidvodnoi systemy* [Design computation of the forces of the tether of the marine tether system]. Mykolaiv, UDMTU Publ., 1998. 43 p.
- [3] Bugayenko B. A. *Dinamika sudovykh spuskopodyemnykh operatsiy* [Dynamics of the ship launch and lift operations]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2004. 320 p.
- [4] Poddubnyy V. I., Shamarin Yu. E., Chernenko D. A., Astakhov L. S. *Dinamika podvodnykh buksiruyemykh sistem* [Dynamics of underwater towed systems]. Saint Petersburg, Sudostroyeniye Publ., 1995. 200 p.
- [5] Shamarin Yu. E. et. al. *Dinamika podvodnykh okeanograficheskikh sistem* [Dynamics of underwater oceanographic systems]. Kyiv, 2001. 228 p.
- [6] Dmitrochenko O. N. *Metody modelirovaniya dinamiki gibridnykh sistem tel s uchetom geometricheskoy nelineynosti* [Methods of modelling dynamics of hybrid systems of bodies with account of geometric non-linearity]. *Dinamika, prochnost i nadezhnost transportnykh mashin* [Dynamics, strength and reliability of transport vehicles]. Bryansk, BGTU Publ., 2001, pp. 24–34.
- [7] Yegorov V. I. *Podvodnyye buksiruyemyye sistemy* [Underwater towed systems]. Leningrad, Sudostroyeniye Publ., 1981. 304 p.

- [8] Ikonnikov I. B., Gavrilov V. M., Puzyrev G. V. *Podvodnyye buksiruyemyye sistemy i bui neytralnoy plavuchesti* [Underwater towed systems and buoys of neutral bouyancy]. Saint Petersburg, Sudostroyenie Publ., 1992. 224 p.
- [9] Kachurin V. K. *Teoriya visyachikh system. Sticheskiy rasschet* [Theory of hover systems. Static calculations]. Leningrad, Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1962. 224 p.
- [10] Korolev V. I. *Trekhmernaya zadacha o dvizhenii sistemy tel v potoke* [Three-dimensional problem of movement of the system of bodies in the flow]. *Gidrodinamika — Hydrodynamics*, 1978, issue 38, pp. 59–76.
- [11] Korolev V. I., Lemeshko Ye. A. *Ravnovesie sistemy gibkaya nit – telo v trekhmernom potoke zhidkosti* [Balance of the system «flexible line – body» in the three-dimensional flow of liquid]. *Gidrodinamika — Hydrodynamics*, 1978, issue. 38, pp. 108–112.
- [12] Lavrentyev M. A., Shabot B. V. *Problemy gidrodinamiki i ikh matematicheskiye modeli* [Hydrodynamics problems and their mathematical models]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 407 p.
- [13] Merkin D. R. *Vvedeniye v mekhaniku gibkoy niti* [Introduction of the flexible line into mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 240 p.
- [14] Mosolov V. Ye., Tikhonov V. S. *Opredefeniye peredatochnoy funktsii gibkoy nerastyazhimoy niti pri prostranstvennom obtekanii potokom* [Determination of the transfer function of a flexible inextensible line under spatial air flow]. *Avtomatika — Automatics*, 1979, no. 4. pp. 24–30.
- [15] Vinogradov N. I., Gutman M. L., Lev I. G., Nisnevich M. Z. *Privyaznyye podvodnyye sistemy. Prikladnyye zadachi statiki i dinamiki* [Underwater tethered systems. Applied problems of statics and dynamics]. Saint Petersburg, Izdatelstvo Sankt-Peterburgskogo universiteta Publ., 2000. 324 p.
- [16] Rashevskiy P. K. *Kurs differentsialnoy geometrii* [Differential geometry]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1950. 428 p.
- [17] Saltanov N. V. *Gibkiye niti v potokakh* [Flexible lines in flows]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974. 140 p.
- [18] Trunin K. S. *Udoskonalennia metodiv proektuvannia gnuchkykh zviazkiv morskykh pryviaznykh system* [Improvement of design methods for marine tethered systems]. *Materialy Pershoi Mizhnarodnoi NTK «Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi»* [Proceedings of the 1st International Scientific and Technical Conference «Innovations in Shipbuilding and Ocean Engineering»]. Mykolaiv, 2010. pp. 137–138.
- [19] Trunin K. S. *Problemy matematychnoho modeliuвання hnuchkykh ziednan morskykh pryviaznykh system* [Problems of mathematic modeling of flexible connections of marine tethered systems]. *Materialy II mizhnarodnoi NPK «Suchasni informatsiini ta innovatsiini tekhnologii na transporti (MINTT–2010), (25.05–27.05.2010)* [Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Conference «Modern information and innovation technologies in transport (MINTT–2010)». Kherson, 2010, pp. 226–230.
- [20] Trunin K. S. *Primeneniye matematicheskikh modeley funktsionirovaniya morskikh pryviaznykh sistem* [Application of mathematical models of functioning of marine tethered systems]. *Materialy XVIII mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Prikladnyye zadachi matematiki i tehniki»* [Proceedings of the 18th International Scientific and Technical Conference «Applied problems of mathematics and mechanics»]. Sevastopol, 2010, pp. 176–179.
- [21] Trunin K. S. *Novyye proektnyye zadachi mekhaniki gibkikh svyazey morskikh pryviaznykh sistem* [New designing problems of mechanics of flexible connections of marine tethered systems]. *Materialy XVII mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Prikladnyye zadachi matematiki i tehniki»* [Proceedings of the 17th International Scientific and Technical Conference «Applied problems of mathematics and mechanics»]. Sevastopol, 2009, pp. 78–80.
- [22] Trunin K. S. *Matematicheskaya model morskoй pryviaznoy sistemy s gibkoy svyazyu* [Mathematical model of the marine tethered system with a flexible connection]. *Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi: materialy V Mizhnarodnoi naukovno-tekhnichnoi konferentsii* [Proceedings of the 5st International Scientific and Technical Conference «Innovations in Shipbuilding and Ocean Engineering»]. Mykolaiv, 2014. pp. 386–388.
- [23] Trunin K. S. *Matematicheskaya model gibkoy svyazi v sostave morskoй pryviaznoy sistemy* [Mathematical model of the flexible connection within a marine tethered system]. *Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi: materialy VI Mizhnarodnoi naukovno-tekhnichnoi konferentsii* [Proceedings of the 6th International Scientific and Technical Conference «Innovations in Shipbuilding and Ocean Engineering»]. Mykolaiv, 2015. pp. 300–304.
- [24] Dmitrochenko O. N., Pogorelov D. Yu. Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics 10, no. 1, Special issue «Virtual Nonlinear Multibody Systems»*, 2003, pp. 17–43.
- [25] Schwertassek R. Flexible bodies in multibody systems (in «Computational methods in mechanical systems: mechanism analysis, synthesis and optimization» by Jorge Angeles, Evtim Zakhariev). NATO ASI series. Series F, Computer and systems sciences, vol. 161. pp. 329–363.
- [26] Shabana A. A., Yakoub R. Y. Three dimensional absolute nodal coordinate for beam elements; Theory. *Journal of Mechanical Design*, no. 123, 2001, pp. 606–621.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В связи с увеличением рабочих глубин и расширением сфер использования морской привязной системы (МПС) [18] возникает необходимость совершенствования теории и методов проектирования гибких связей (ГС) МПС, уточнения существующих методик расчётов. Это обусловлено тем, что данные методы расчёта и проектирования либо являются упрощёнными и не учитывают действительные нагрузки и характер нагружения ГС МПС либо довольно сложные и громоздкие для конструкторов-проектантов и требуют значительных затрат времени для их выполнения.

Многие исследователи отмечают, что аналитические методы сегодня недостаточно алгоритмичны. Наиболее перспективным при этом считается применение численных методов [19]. ГС, находящаяся в воде и являющаяся пространственным криволинейным объектом, до приложения нагрузки сохраняет свою форму до тех пор, пока на него не начнут воздействовать какие-либо силы. При функционировании МПС примером таких воздействий могут служить усилия на ГС судов-буксировщиков, течений, подводные аппараты (ПА), аварийные режимы работы [20]. Следует учитывать механические нагрузки на ГС, которые возникают из-за влияния ветра, волнения моря, морских течений и маневров плавсредств.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

В настоящее время уже достаточно публикаций, в которых теория гибкой нити излагается с различных точек зрения, полнотой и строгостью. Некоторые из них представляют монографии, посвященные узкой проблеме, часть работ охватывает очень широкий круг вопросов, главным образом, теоретического характера. Д. Р. Меркин отмечал, что содержится свыше 200 различных библиографических ссылок, где в той или иной форме дано изложение истории развития механики гибкой нити. В настоящее время таких источников, наверно, уже свыше нескольких тысяч.

В учебном пособии В. И. Егорова рассмотрены модели гибких нитей в обобщённых потенциальных полях, асимптотический метод исследования пространственных конфигураций гибких нитей в потоках, нелинейная модель динамики нитей в потоках, дискретная модель нити [17].

В работе [14] из всего разнообразия режимов движения и способов связи движущихся тел с помощью нити проанализирована задача о буксировании тяжёлого тела. Математическая модель нити описывается сложной системой интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Предложенный способ позволяет приближённо найти любую передаточную функцию гибкой нерастяжимой нити при

пространственном обтекании потоком с требуемой для практики точностью.

В. И. Королев обратил свое внимание на движение системы, состоящей из двух тел, соединённых гибкой нитью в стационарном потоке жидкости, когда в зависимости от глубины скорость потока изменяется по величине и направлению, а также привел пример задачи определения конфигурации натяжения нити. Гибкая нить заменена рядом жёстких элементов, соединённых шарнирами, позволяющими всей системе деформироваться (без трения) в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Исследовано равновесие одного элемента в стационарном потоке. Задача решена на ЭВМ: на печать выдаются координаты узловых точек (шарниров), дающие представление о форме нити в пространстве, и компоненты натяжения (или полное натяжение) в этих точках [10, 11].

В [7] описаны равновесие троса при движении в воде; гидродинамические силы, действующие на элементарный отрезок троса, обтекаемый потоком жидкости; пространственная задача о равновесии тяжёлого троса при движении в воде; задача о равновесии невесомого троса с учётом только нормальной составляющей полной гидродинамической силы; плоская задача о равновесии троса.

Изучению систем координат для ГС, модели динамики ГС (уравнений динамики ГС и гидродинамических нагрузок в них), равновесию ГС при установившемся движении приводных подводных систем (ППС), линейной и нелинейной задачам динамики ППС, задаче гидроупругости ППС (определения равновесия ГС с учётом жёсткости на изгиб), движению двухзвенной ППС посвящена работа [15].

М. А. Лаврентьев рассматривает математические модели жидкой среды, основной математический аппарат, конформные и квазиконформные отображения, плоские и пространственные задачи, пространственные задачи о струях, неустановившиеся движения, вихри и взрывы [12].

В. С. Блинцов анализировал проблемы, связанные с определением проектных характеристик систем с оценкой функциональных возможностей самоходных подводных аппаратов (СПА) (задачи о позиционировании СПА на течении и рывке кабель-троса ПА [2]).

В коллективной монографии [5] разработаны математические модели и методы расчётов параметров поведения в потоке устройств для буксировки аппаратуры при движении с постоянной скоростью, определены параметры неустойчивых режимов буксировки, расчёты параметров колебаний буксируемых систем (БС) на волнении.

Как видим, существует обширная литература, в которой изучено поведение ГС в различных средах, областях деятельности. Современная вычислительная техника дает возможность развития и реализации

ряда численных методов решения теоретических задач гидромеханики и математического моделирования, позволяющих глубоко исследовать вопросы их движения и динамики «всухую» с привлечением минимального объема экспериментальных данных [15]. К настоящему времени многие задачи гидродинамики, возникающие в процессе создания разнообразных ППС, нашли свое законченное решение [1–5, 8, 9].

ЦЕЛЮЮ СТАТЬИ является получение уравнений динамики элемента ГС МПС, которые могут описывать его перемещения в абсолютной системе координат.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Для реализации поставленной цели предполагается:

- усовершенствовать проектирование ГС МПС, основывающееся на улучшении существующих методов путём создания компьютерных моделей динамики ГС с учётом их эксплуатационных характеристик и позволяющих более правильно и рационально создавать новые ГС для МПС с необходимыми свойствами и параметрами;

- предложить рекомендации по прогнозированию возможных эксплуатационных нагрузок для разработки таких устройств.

Несмотря на функциональное и конструктивное разнообразие современных МПС и ППС, их авторы сталкиваются с рядом сходных проблем и нуждаются в обобщении подходов для их разрешения. В частности, к ним относятся проблемы гидродинамики. При создании движущихся под водой привязных систем и аппаратов изучение вопросов их динамики, силового воздействия среды и судна-носителя (СН), вопросы управления и стабильности движения первостепенны и во многом определяют возможность нормального функционирования аппаратуры, установленной на них. При этом наиболее существенной особенностью динамики ППС, усложняющей ее по сравнению с известной теорией движения в жидкости и газе автономных твердых тел, является необходимость учета влияния ГС как системы с распределенными параметрами, также взаимодействующей с потоком жидкости.

МПС состоит из СН, ПА и соединяющей их ГС (рис. 1).

Введём правую систему координат $0xyz$. Оси $0x$ и $0y$ лежат в плоскости поверхности моря, а ось $0z$ совпадает с направлением вектора силы тяжести q . Коренной конец ГС закреплён на СН и имеет координаты $X_{сн}, Y_{сн}, Z_{сн}$. Ходовой конец ГС прикреплен на ПА с координатами $X_{па}, Y_{па}, Z_{па}$. Скорость СН задана вектором $V_{сн}$, а ПА — вектором $V_{па}$. Движение ПА также может быть определено вектором силы тяги его

двигателя. Скорость морского течения стационарна, но неоднородна в заданной акватории [22, 23].

На малый элемент ГС длиной ds действуют силы растяжения T и $T+dT$, которые создаются в результате сил, приложенных к коренному $F_{сн}$ и ходовому $F_{па}$ концам ГС со стороны СН и ПА, а также сил тяжести q ГС и гидродинамических сил F_n и F_τ , действующих по нормали и по касательной к поверхности ГС (рис. 2).

На элемент ГС также может действовать сосредоточенная внешняя сила G , возникающая в результате контактного взаимодействия ГС с подводными объектами. С прикладной точки зрения невозможно осуществить точечный контакт ГС с подводным объектом. Такой контакт будет происходить на некоторой малой длине ГС, но не в точке. Поэтому будем считать, что сила G воздействует на длину ds малого элемента ГС, т. е. она является распределённой на малой длине ГС.

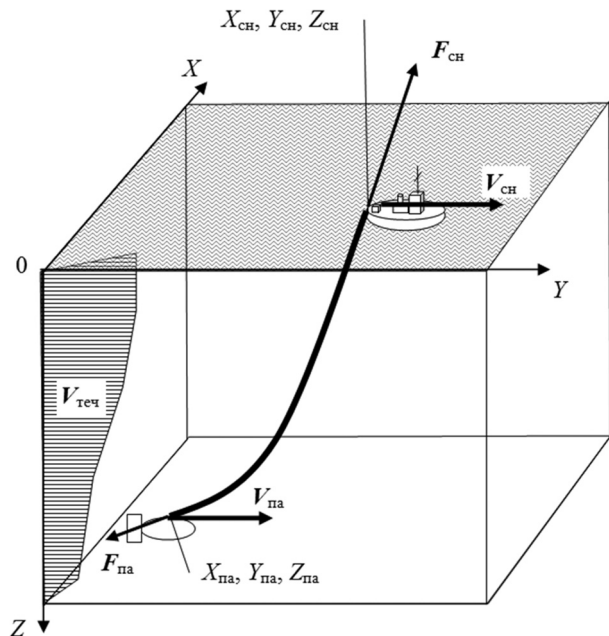


Рис. 1. Общая схема МПС

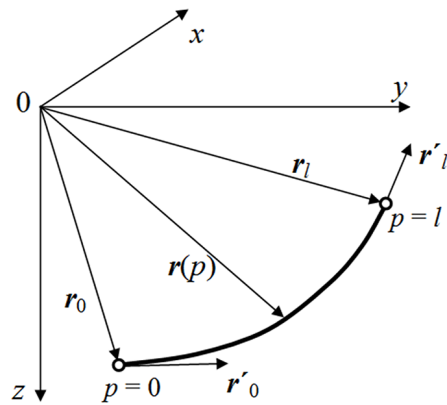


Рис. 2. Осевая линия элемента ГС

В процессе движения СН и ПА расстояние между ними изменяется, что вызывает преобразование сил, действующих на ГС и её форму. Силы тяжести q ГС характеризуются линейной плотностью самой ГС, а также наличием на ней дополнительных распределённых грузов и поплавков. ГС можно представить в виде совокупности отдельных малых элементов длиной l , соединённых между собой упругими связями [6, 24].

Радиус-вектор ГС $r(p)$ связан с вектором координат e зависимостью:

$$\vec{r}(p) = \mathbf{S}(p) \cdot \vec{e}, \quad (1)$$

где \vec{e} — вектор обобщённых координат;

$$\vec{e} = \{\vec{r}_0^{0T} \ \vec{r}_0^{1T} \ \vec{r}_l^{0T} \ \vec{r}_l^{1T} \ \beta_0 \ \beta_l\}^T;$$

$$\vec{r}_u^k = \left. \frac{\partial \vec{r}^k}{\partial p^k} \right|_{p=u} = \begin{Bmatrix} x_u^k \\ y_u^k \\ z_u^k \end{Bmatrix} \text{ — радиус-векторы } (k = 0)$$

и касательные векторы ($k = 1$) к осевой линии ГС в её конечных точках ($p = 0$ и $p = l$), когда u принимает значения 0 ($p = 0$) или l ($p = l$); $\mathbf{S}(p) = \parallel s_1 \mathbf{I} \ s_2 \mathbf{I} \ s_3 \mathbf{I} \ s_4 \mathbf{I} \ 0 \ 0 \parallel$ — матрица функций форм ГС; \mathbf{I} — единичная матрица (3×3); β_k — углы поворота поперечных сечений ГС в конечных точках элемента относительно нормали n репера Френе осевой линии (рис. 3) [24, 25]; l — длина осевой линии элемента ГС.

Угол β определяется вдоль осевой линии ГС ($p \in [0; l]$) с помощью интерполяционной зависимости:

$$\beta(p) = \beta_0 \cdot (1 - p/l) + \beta_l \cdot p/l. \quad (2)$$

В качестве функций формы ГС использованы функции Эрмита:

$$s_1(p) = s_3(l - p) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad (3)$$

$$s_2(p) = -s_4(l - p) = l \cdot (\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad (4)$$

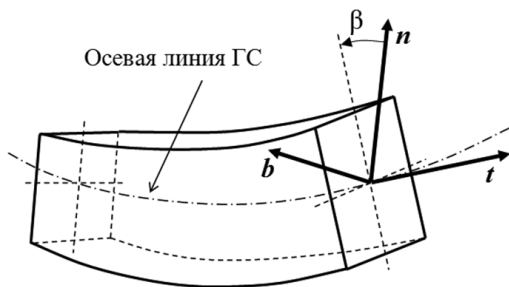


Рис. 3. Поворот конечного поперечного сечения элемента ГС относительно нормали репера Френе осевой линии, состоящего из вектора касательной t , нормали n и бинормали b

$$s_3(p) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad (5)$$

$$s_4(p) = l \cdot (\xi^3 - \xi^2), \quad (6)$$

$$\xi = p/l, \quad (7)$$

позволяющие аппроксимировать форму элемента ГС по величине и производной радиуса-вектора ГС:

$$x(p) = s_1(p) \cdot x_0 + s_2(p) \cdot x'_0 + s_3(p) \cdot x_l + s_4(p) \cdot x'_l, \quad (8)$$

$$y(p) = s_1(p) \cdot y_0 + s_2(p) \cdot y'_0 + s_3(p) \cdot y_l + s_4(p) \cdot y'_l, \quad (9)$$

$$z(p) = s_1(p) \cdot z_0 + s_2(p) \cdot z'_0 + s_3(p) \cdot z_l + s_4(p) \cdot z'_l. \quad (10)$$

Уравнения движения элемента ГС могут быть получены с помощью уравнений Лагранжа II рода [24]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}} - \frac{\partial T}{\partial e} + \frac{\partial U}{\partial e} = \frac{\delta W}{\delta e}, \quad (11)$$

где T — кинетическая энергия элемента ГС, Дж;

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho_l \cdot \dot{\vec{r}}^T \cdot \dot{\vec{r}} \cdot dp + \frac{1}{2} \int_0^l J_\beta \cdot \dot{\beta}^2 \cdot dp, \quad (12)$$

где ρ_l — линейная плотность материала ГС, кг/м; U — потенциальная энергия деформации элемента ГС, Дж; δW — виртуальная работа активных сил, Дж;

$$\delta W = \int_0^l \delta \vec{r}^T \cdot \rho_l \cdot \vec{g} \cdot dp + \int_0^l \delta \vec{r}^T \cdot \vec{F} \cdot dp, \quad (13)$$

где g — вектор ускорения силы тяжести, m/c^2 ; F — вектор активных (внешних) сил, действующих на ГС, Н.

Вектор обобщённых координат в абсолютной системе координат [6, 24] не требует пересчёта координат узлов ГС между ней и вспомогательными системами координат, а также при этом отсутствует необходимость учёта присоединённых масс жидкости к ГС, если при определении гидродинамических сил сопротивления ГС использовать коэффициенты, установленные эмпирическим путём [15]. Таким образом, метод абсолютных координат [6, 16, 24] имеет существенные преимущества по сравнению с другими методами [4, 5, 15].

После подстановки производных по времени радиуса-вектора $\dot{\vec{r}} = S \cdot \dot{\vec{e}}$ (1) и его вариации $\delta \vec{r} = S \cdot \delta \vec{e}$ в (11) уравнения движения в матричной форме принимают вид:

$$M \cdot \ddot{\vec{e}} + \vec{Q}^e = \vec{Q}^g + \vec{Q}^F, \quad (14)$$

куда входят постоянные матрица масс (M) и столбец обобщённых сил тяжести (Q^g), а также вектор внешних активных сил (Q^F) и реакций упругого деформирования ГС (Q^e).

Матрица масс рассчитывается по формуле:

$$M = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{e} \partial \dot{e}^T} = \rho_l \int_0^l S^T S \cdot dp = const, \quad (15)$$

а столбец обобщённых сил тяжести — по выражению:

$$\bar{Q}^g = \frac{\partial W^g}{\partial \bar{e}} = \int_0^l \rho_l \cdot S^T \cdot \bar{g} \cdot dp = const. \quad (16)$$

Уравнение (14) записано без учёта жёсткости изгиба и кручения, которые будут приняты во внимание при дальнейшем совершенствовании математической модели ГС в составе МПС.

Элементы вектора обобщённых упругих сил можно описать так:

$$\bar{Q}^e = \frac{\partial U}{\partial \bar{e}}. \quad (17)$$

Потенциальная энергия внутренних сил упругих деформаций элемента ГС определяется по формуле:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (EA\varepsilon^2 + EJ_1\chi_1^2 + EJ_2\chi_2^2 + GJ_\beta\tau^2) dp, \quad (18)$$

где E — модуль Юнга материала ГС, Па; G — модуль сдвига материала ГС, Па; A — площадь поперечного сечения ГС, м²; J_1, J_2 — моменты инерции поперечного сечения ГС относительно его главных осей, м⁴; J_β — полярный момент инерции поперечного сечения ГС, м⁴; ε — продольная деформация осевой линии ГС с продольной жёсткостью $E \cdot A$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\bar{r}'^T \bar{r}'} - 1 \approx \frac{1}{2} (r'^T r' - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Простейшая модель продольных сил получена в работе [16] с использованием следующего способа осреднения продольной деформации:

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{|r_0 - r_l|}{l} - 1 = \frac{\sqrt{(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)^T (\bar{e}_1 - \bar{e}_3)}}{l} - 1. \quad (20)$$

В этом случае продольные силы можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} Q_i^e &= \frac{\partial \Pi^e}{\partial e_i} = EA \int_0^l \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_i} dp = \\ &= \sum_{k=1}^4 E \cdot A \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \bar{S}_{ik}^{11} \cdot e_k = \sum_{k=1}^4 K_{ik}^e \cdot e_k, \end{aligned} \quad (21)$$

где K_{ik}^e — матрица продольной жёсткости ГС.

Силы реакции изгиба ГС находятся таким образом:

$$Q_i^x = \frac{\partial \Pi^x}{\partial e_i} = EJ \int_0^l \chi \frac{\partial \chi}{\partial e_i} dp.$$

Кривизны χ_1 и χ_2 осевой линии по отношению к главным осям инерции площади поперечного сечения с изгибными жёсткостями EJ_1, EJ_2 и кривизной осевой линии [16] вычисляются следующим образом:

$$\chi_0 = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}, \quad (22)$$

$$\chi_1 = \chi_0 \cdot \cos \beta, \quad \chi_2 = \chi_0 \cdot \sin \beta, \quad (23)$$

Силы реакции кручения ГС можно определить по формуле:

$$Q_i^\tau = \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial e_i} = GJ_\tau \int_0^l \tau \frac{\partial \tau}{\partial e_i} dp. \quad (24)$$

Относительный угол закручивания поперечного сечения ГС [26] равен:

$$\tau = \chi_\tau + \partial \beta / \partial p, \quad (25)$$

где χ_τ — кручение (вторая кривизна) осевой линии с жёсткостью на кручение GJ_τ :

$$\chi_\tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2}. \quad (26)$$

Для расчета элементов матрицы масс по формуле (15) необходимо выполнить замену переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \rho_l \int_0^l s_i^T s_j \cdot dp = \rho_l \cdot l \int_0^1 s_i^T s_j \cdot d \frac{p}{l} = \\ &= \rho_l \cdot l \int_0^1 s_i^T s_j \cdot d\xi, \quad i, j \in [1; 4]. \end{aligned} \quad (27)$$

В данной статье элементы матрицы не приведены по причине ограничения ее объёма. Аналогичным образом вычислены остальные элементы матрицы M , в результате которых она приобретает вид (28).

Матрица (28) симметрична относительно главной диагонали.

$$M = \frac{\rho_l \cdot l}{420} \times \begin{pmatrix} 156\mathbf{I} & 22\mathbf{I} & 54\mathbf{I} & -13\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 22\mathbf{I} & 4l^2\mathbf{I} & 13\mathbf{I} & -3l^2\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 54\mathbf{I} & 13\mathbf{I} & 156\mathbf{I} & -22\mathbf{I} & 0 & 0 \\ -13\mathbf{I} & -3l^2\mathbf{I} & -22\mathbf{I} & 4l^2\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{1313} & M_{1314} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{1413} & M_{1414} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Элементы матрицы масс, связанные с кручением ГС ($M_{1313}, M_{1314}, M_{1413}, M_{1414}$), получаются в результате преобразования второго слагаемого кинетической энергии элемента ГС (12):

$$T_{\tau} = \frac{1}{2} J_{\beta} \int_0^l \dot{\beta}^2 \cdot dp. \quad (29)$$

Из аппроксимации угла кручения (2) следует:

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_0 \cdot (1 - p/l) + \dot{\beta}_l \cdot p/l, \quad (30)$$

тогда

$$T_{\tau} = \frac{1}{2} J_{\beta} \int_0^l [\dot{\beta}_0 \cdot (1 - p/l) + \dot{\beta}_l \cdot p/l]^2 \cdot dp. \quad (31)$$

Элементы матрицы масс кручения элемента ГС можно определить из первого слагаемого уравнения Лагранжа II рода (11):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\tau}}{\partial \dot{\beta}_0} = \frac{1}{2} J_{\beta} \int_0^l 2[\dot{\beta}_0(1-p/l) + \dot{\beta}_l \cdot p/l](1-p/l) dp, \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\tau}}{\partial \dot{\beta}_l} = \frac{1}{2} J_{\beta} \int_0^l 2[\dot{\beta}_0(1-p/l) + \dot{\beta}_l \cdot p/l] p/l \cdot dp. \quad (33)$$

Для нахождения K_{ik}^{ε} — матрицы продольной жёсткости элементов ГС — необходимо вычислить составляющие её элементов. Элементы матрицы \bar{S}_{ik}^{11} симметричны относительно главной диагонали:

$$Q_i^{\varepsilon} = \sum_{k=1}^4 E \cdot A \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \bar{S}_{ik}^{11} \cdot e_k = \quad (34)$$

$$= \sum_{k=1}^4 K_{ik}^{\varepsilon} \cdot e_k = K^{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon}, \quad K^{\varepsilon} = K_0^{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon}.$$

Подставив функции Эрмита (3)–(6) в формулу для элемента матрицы M_{22} , получим:

$$\bar{Q}_1^g = \rho_l \cdot \bar{g} \cdot \int_0^l s_1 \cdot dp, \quad (35)$$

$$\bar{Q}_2^g = \rho_l \cdot \bar{g} \cdot \int_0^l s_2 \cdot dp, \quad (40)$$

$$\bar{Q}_3^g = \rho_l \cdot \bar{g} \cdot \int_0^l s_3 \cdot dp, \quad (41)$$

$$\bar{Q}_4^g = \rho_l \cdot \bar{g} \cdot \int_0^l s_4 \cdot dp. \quad (42)$$

ВЫВОДЫ. Анализ существующих моделей динамики ГС МПС показал, что в большинстве моделей элемента ГС в МПС рассматривают динамику ГС при относительно малых перемещениях и изгибах, что свидетельствует об актуальности разработки данной математической модели динамики элемента ГС, позволяющей учитывать большие перемещения ГС в составе МПС. Получены уравнения динамики элемента ГС МПС, которые дают возможность описывать значительные величины его перемещений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Блинцов В. С.** Привязные подводные системы [Текст] / В. С. Блинцов. — К. : Наукова думка, 1998. — 231 с.
- [2] **Бліницов В. С.** Проектний розрахунок зусиль у кабель-тросі прив'язної підводної системи [Текст] : навчальний посібник / В. С. Бліницов, В. С. Магула. — Миколаїв : УДМУТ, 1998. — 43 с.
- [3] **Бугаенко Б. А.** Динамика судовых спускоподъёмных операций [Текст] / Б. А. Бугаенко. — К. : Наукова думка, 2004. — 320 с.
- [4] Динамика подводных буксируемых систем [Текст] / В. И. Поддубный, Ю. Е. Шамарин, Д. А. Черненко, Л. С. Астахов. — СПб : Судостроение, 1995. — 200 с.
- [5] Динамика подводных океанографических систем [Текст] / Ю. Е. Шамарин, В. И. Поддубный, Л. И. Богатов, С. В. Сидорский, А. И. Макаренко. — К. : 2001. — 228 с.
- [6] **Дмитrochenко О. Н.** Методы моделирования динамики гибридных систем тел с учётом геометрической нелинейности [Текст] / О. Н. Дмитrochenко // Динамика, прочность и надёжность транспортных машин : Сб. тр. под ред. Б. Г. Кеглина. — Брянск : БГТУ. — 2001. — С. 24–34.
- [7] **Егоров В. И.** Подводные буксируемые системы: учебное пособие [Текст] / В. И. Егоров. — Л. : Судостроение, 1981. — 304 с.
- [8] Подводные буксируемые системы и буи нейтральной плавучести [Текст] / И. Б. Иконников, В. М. Гаврилов, Г. В. Пузырев. — СПб. : Судостроение, 1992. — 224 с.
- [9] **Качурин В. К.** Теория висячих систем. Статический расчёт [Текст] / В. К. Качурин. — Л., М. : Госстройиздат, 1962. — 224 с.
- [10] **Королёв В. И.** Трёхмерная задача о движении системы тел в потоке [Текст] / В. И. Королёв. // Гидродинамика. — К. : Наукова думка, 1978. — Вып. 38. — С. 59–76.
- [11] **Королёв В. И.** Равновесие системы гибкая нить – тело в трёхмерном потоке жидкости [Текст] / В. И. Королёв, Ё. А. Лемешко // Гидромеханика. — К. : Наукова думка, 1978. — Вып. 38. — С. 108–112.
- [12] **Лаврентьев М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабот. — М. : Наука. 1977. — 407 с.
- [13] **Меркин Д. Р.** Введение в механику гибкой нити [Текст] / Д. Р. Меркин. — М. : Наука, 1980. — 240 с.
- [14] **Мосолов В. Е.** Определение передаточной функции гибкой нерастяжимой нити при пространственном обтекании потоком [Текст] / В. Е. Мосолов, В. С. Тихонов. — К. : Автоматика, 1979. — № 4. — С. 24–30.
- [15] Привязные подводные системы. Прикладные задачи статики и динамики [Текст] / Н. И. Виноградов, М. Л. Гутман, И. Г. Лев, М. З. Нисневич. — СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2000. — 324 с.

- [16] **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии [Текст] / П. К. Рашевский. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 428 с.
- [17] **Салганов Н. В.** Гибкие нити в потоках. Монография. [Текст] / Н. В. Салганов // АН УССР, Институт гидромеханики. — К. : Наукова думка, 1974. — 140 с.
- [18] **Трунін К. С.** Удосконалення методів проектування гнучких зв'язків морських прив'язних систем [Текст] / К. С. Трунін // I Міжнародна НТК «Інновації в суднобудуванні та океанотехніці» присвячена 90 річчю НУК імені адмірала Макарова, м. Миколаїв (15.09.2010–17.09.2010): Матеріали Першої Міжнародної НТК «Інновації в суднобудуванні та океанотехніці». — Миколаїв, НУК, 2010. — С. 137–138.
- [19] **Трунін К. С.** Проблеми математичного моделювання гнучких з'єднань морських прив'язних систем [Текст] / К. С. Трунін // Матеріали II міжнародної НПК «Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті (MINTT-2010), (25.05.2010–27.05.2010): Збірник наукових праць II міжнародної НПК, Том. 1. — Херсон : Видавництво Херсонського державного морського інституту, 2010. — С. 226–230.
- [20] **Трунин К. С.** Применение математических моделей функционирования морских привязных систем [Текст] / К. С. Трунин // Материалы XVIII международной НТК «Прикладные задачи математики и механики». — Севастополь : СевНТУ, 2010. — С. 176–179.
- [21] **Трунин К. С.** Новые проектные задачи механики гибких связей морских привязных систем [Текст] / К. С. Трунин // Материалы XVII международной научно-технической конференции «Прикладные задачи математики и механики» / научный ред. Ю.Е. Обжерин. — Севастополь : СевНТУ, 2009. — С. 78–80.
- [22] **Трунин К. С.** Математическая модель морской привязной системы с гибкой связью [Текст] / К. С. Трунин // Інновації в суднобудуванні та океанотехніці: матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції. — Миколаїв : НУК, 2014. — С. 386–388.
- [23] **Трунин К. С.** Математическая модель гибкой связи в составе морской привязной системы [Текст] / К. С. Трунин // Інновації в суднобудуванні та океанотехніці: матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції. — Миколаїв : НУК, 2015. — С. 300–304.
- [24] **Dmitrochenko O. N.** Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation [Текст] / O. N. Dmitrochenko, D. Yu. Pogorelov // Multibody System Dynamics 10. — No. 1, Special issue 'Virtual Nonlinear Multibody Systems'. — Kluwer, Dordrecht, 2003. — Pp. 17–43.
- [25] **Schwertassek R.** Flexible bodies in multibody systems [Текст] / R. Schwertassek, Jorge Angeles, Evtim Zakhariev. — Computational methods in mechanical systems: mechanism analysis, synthesis and optimization. — NATO ASI series. Series F, Computer and systems sciences. — Vol. 161. — Pp. 329–363.
- [26] **Shabana A. A.** Three dimensional absolute nodal coordinate for beam elements; Theory [Текст] / A. A. Shabana, R. Y. Yakoub // Journal of Mechanical Design 123, 2001. — Pp. 606–621.

© К. С. Трунін

Надійшла до редколегії 17.01.2017
Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК
д-р техн. наук, проф. В. С. Бліщов